Université Claude Bernard - ENS Lyon
Groupe de travail : Bloch's lectures on algebraic cycles

THÉORÈMES DE RIGIDITÉ

F. DÉGLISE

Table des matières

Conventions

Les schémas considérés ici, relativement à une base donnée, sont toujours supposés séparés de type fini. On peut adopter sans dommage la convention que lisse signifie lisse séparé de type fini.

1. Théorème principal

1.1. Un des points clés des théorèmes de rigidité que nous allons voir est l'utilisation d'une bonne notion de transferts. Cette notion a été formalisée par Voevodsky (Suslin y est aussi pour beaucoup) grâce à la notion de correspondance finie.

Fixons un schéma régulier S et X, Y deux S-schémas lisses. Une *S-correspondance finie* α entre de X vers Y est un cycle algébrique de $X \times_S Y$ dont le support est fini équidimensionel sur X. Un exemple de telle correspondance finie est donnée par le graphe Γ_f d'un morphisme de S-schémas $f : X \to Y$.[1] Un autre exemple plus intéressant est donné dans le cas où f est fini equidimensionnel : la transposée[2] ${}^t f$ du graphe Γ_f est alors une correspondance finie.

Les correspondances finies se composent grâce à la formule habituelle et la formule des Tor pour le calcul des multiplicités d'intersection. On a de plus les relations : $[\Gamma_g] \circ [\Gamma_d] = \Gamma_{g \circ f}$ (resp. ${}^t f \circ {}^t g = {}^t(g \circ f)$) lorsque f et g sont des morphismes composables (resp. et finis équidimensionnels).

On dit qu'un faisceau F sur la catégorie des S-schémas lisses *admet des transferts* s'il se prolonge en foncteur sur la catégorie des S-schémas lisses avec correspondances finies.

Remark 1.2. Grâce à la théorie des cycles relatifs de Suslin et Voevodsky, on peut donner une définition de S-correspondance finie pour S un schéma (noethérien de dimension finie) et X, Y des S-schémas séparés de type finis. Cette construction

Date: Janvier 2017.

1. D'après notre convention sur les S-schémas lisses, f est séparé ce qui implique que Γ_f est un sous-schéma fermé de $X \times_S Y$.

2. *i.e.* son image par le morphisme $X \times_S Y \to Y \times_S X$ qui échange les facteurs ;

permet de construire définir des complexes motiviques dans une grande généralité. Nous y reviendrons.

Avant de passer à l'énoncé du théorème de rigidité, rappelons quelques faits fondamentaux.

Définition 1.3 (Suslin). Soit X un S-schéma lisses et $\Delta_S^\bullet$ le S-schéma cosimplicial standard.[3] On définit le *complexe de Suslin* $C_*^S(X/S)$ de X/S comme le complexe de groupes abéliens suivants (libres) :

$$\ldots \to c_S(\Delta_S^n, X) \xrightarrow{d_n} c_S(\Delta_S^{n+1}, X) \to \ldots \to c_S(\Delta_S^0, X)$$

où d_n est donnée comme d'habitude par la somme alternée des morphismes induits par les flèches de dégénérescence $\partial_n^i : \Delta_S^{n+1} \to \Delta_S^n$.

On définit les *groupes d'homologie de Suslin* $H_*^S(X/S)$ comme les groupes d'homologie de ce complexe.

Un des calculs fondamentaux de la théorie est dû indépendemment à Suslin-Voevodsky et Lichtenbaum (cf. [SV96, 3.1]).

Théorème 1.4. *Soit X un S-courbe affine lisse admettant une* bonne compactification*, autrement dit un S-schéma $\bar{X}$ propre dont les fibres sont de dimension* 1 *et telle que :*

- *$\bar{X}$ est normal ;*
- *X est un ouvert dense de $\bar{X}$;*
- *le complémentaire $X_\infty = \bar{X} - X$ admet un voisinage ouvert affine dans $\bar{X}$.*

Alors :

$$H_n^S(X/S) = \begin{cases} \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) & \textit{si } n = 0, \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)$ *désigne le groupe de Picard relatif, associé à la paire de schémas* $(\bar{X}, X_\infty)$.[4]

Indication. Sous les hypothèses du théorème, on peut identifier pour tout S-schéma lisse Y, le groupe $c_S(Y, X)$ avec le groupe des diviseurs de Cartier de $Y \times_S \bar{X}$ à support disjoint de $Y \times_S X_\infty$, que l'on note : $\mathrm{Div}(Y\bar{X}, YX_\infty)$. Le complexe de Suslin est donc isomorphe à

$$C_n^S(X/S) \simeq \mathrm{Div}(\Delta^n \times_S \bar{X}, \Delta^n \times_S X_\infty).$$

Essentiellement par définition du groupe de Picard relatif, on obtient posant $X' = Y\bar{X}$, $Z' = YX_\infty$, $U' = X' - Z'$, une suite exacte :

$$0 \to G_0(X', Z') \to G_1(X', Z') \to \mathrm{Div}(X', Z') \to \mathrm{Pic}(X', Z') \to 0$$

où l'on a noté :

$$G_0(X', Z') := \Gamma(X', j_!\mathbb{G}_{m,U'}),$$
$$G_1(X', Z') := \left\{ f \in \kappa(X')^\times \mid f \text{ définie et égale à 1 en tous points de } Z' \right\}.$$

Il suffit alors de démontrer que les complexes :

$$G_{0,*} := G_0(\Delta^n \times_S \bar{X}, \Delta^n \times_S X_\infty),$$
$$G_{1,*} := G_1(\Delta^n \times_S \bar{X}, \Delta^n \times_S X_\infty)$$

3. $\Delta_S^n = \mathrm{Spec}(S[t_0, \ldots, t_n]/(t_0 + \ldots + t_n = 1))$, avec les applications faces et dégénérescences évidentes.

4. On peut prendre comme définition la cohomologie étale en degré 1 du faisceau étale $j_!(\mathbb{G}_{m,X})$ sur $\bar{X}$ où $j : X \to \bar{X}$ est l'inclusion évidente.

sont acycliques pour conclure. En effet, par invariance par homotopie du groupe de Picard, le complexe

$$\mathrm{Pic}(\Delta^n \times_S \bar{X}, \Delta^n \times_S X_\infty)$$

est concentré est acyclique en dehors de 0 et son homologie en degré 0 est bien égal à $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)$.

On démontre facilement, compte tenu des hypothèses du théorème que $G_0(\Delta^n \times_S \bar{X}, \Delta^n \times_S X_\infty)$ est nul pour tout n. L'acyclité du complexe $G_{1,*}$ se démontre en exhibant une homotopie astucieuse. □

La première extension du théorème de Roitman, plus exactement de la preuve de ce théorème par Roitman, est le théorème de rigidité suivant, énoncé sous cette forme par Voevodsky :

Théorème 1.5. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p, n un entier premier à p, et $F : (\mathcal{L}_k)^{op} \to \mathbb{Z}/n-\mathrm{mod}$ un préfaisceau sur la catégorie des k-schémas lisses tel que :*

(1) *F est un faisceau pour la topologie étale ;*
(2) *F admet des transferts ;*
(3) *F est invariant par homotopie : $F(X) \xrightarrow{p^*} F(\mathbb{A}^1_X)$.*

Alors, F est constant : pour tout $X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(k)$, $f^* : F(k) \to F(X)$ est un isomorphisme.

Ce théorème se prouve grâce aux résultats suivants.

Lemme 1.6. *Soit F un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie sur $\mathscr{L}_k$ tel que $n.F = 0$ pour un entier n premier à $\mathrm{car}(k)$. Soit S un trait hensélien essentiellement lisse sur k et X/S une courbe affine lisse admettant une bonne compactification.*

Alors pour toutes sections $s_1, s_2 : S \to X$ qui coïncident sur le point fermé de S, les morphismes induits $s_1^*, s_2^* : F(X) \to F(S)$ coïncident.

Démonstration. Notons que les hypothèses sur F et le Théorème 1.4 montrent que le morphisme canonique

$$c_S(S, X) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(S))$$

se factorise par la flèche canonique

$$c_S(S, X) \to \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)/n, \alpha \mapsto \mathcal{L}(\alpha).$$

Pour démontrer le lemme, il suffit donc de montrer que les faisceaux inversible $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(\Gamma_{s_i})$ pour $i = 1, 2$ coïncident.

Or, la flèche canonique :

$$\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)/n \to H^2_{\text{ét}}(X, j_!(\mu_n))$$

est injective ($j : X \to \bar{X}$ l'inclusion évidente). Il résulte donc du théorème de changement de base propre en cohomologie étale que le morphisme de spécialisation

$$s^* : \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)/n \to \mathrm{Pic}(\bar{X}_0, X_{0,\infty})/n$$

est injectif, où X_0 (resp. $X_{0,\infty}$) désigne la fibre de X (resp. X_∞) au-dessus du point fermé de S. Par hypothèse, $s^*(\mathcal{L}_1) = s^*(\mathcal{L}_2)$ et cela conclut. □

Nous aurons par ailleurs besoin du lemme suivant :

Lemme 1.7. *Soit X un schéma affine et $p : X \to \mathbb{A}^d_k$ un morphisme étale. Alors il existe une projection linaire $\phi : \mathbb{A}^d_k \to \mathbb{A}^{d-1}_k = S$ telle que la courbe X/S admet une bonne compactification $(\bar{X}, X_\infty)$.*

Démonstration. Le morphisme p est ouvert, donc son image est un ouvert $U \subset \mathbb{A}^d_k$. Soit Z le fermé complémentaire, qui est donc de dimension $d-1$. D'après le théorème de Noether, il existe donc une projection linaire $\phi : \mathbb{A}^d_k \to \mathbb{A}^{d-1}_k = S$ dont la restriction à Z est finie. Considérons une immersion ouverte

$$\mathbb{A}^d_k \to \mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{A}^{d-1}_k = \bar{U}$$

dont la composée avec la projection sur le deuxième facteur coïncide avec ϕ. On en déduit donc une immersion ouverte $U \to \bar{U}$ qui est une bonnne compactification de U/S — cela du fait que $\bar{U} - U = \{\infty\} \times \mathbb{A}^{d-1}_k \sqcup Z$ est affine. La composée $\bar{p} : X \to \bar{U}$ est quasi-finie et son complémentaire est fini sur S. D'après le main théorème de Zariski, il existe donc une factorisation de $\bar{p}$:

$$X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{f} \bar{U}$$

où j est une immersion ouverte et f un morphisme fini tel que $f(\bar{X} - X) = \bar{U} - U$. Quitte à remplacer $\bar{X}$ par sa normalisation, on a donc obtenu une bonne compactification de X car $\bar{X} - X \subset f^{-1}(\bar{U} - U)$ qui affine puisque f est fini. $\square$

Preuve du théorème de rigidité, 1.5. Posant $A = F(k)$, on dispose d'un morphisme évident de faisceaux $A_{\text{ét}} \to F$ où la source est formée du faisceau constant de valeur A. On doit montre que c'est un isomorphisme. Cela se montre sur les fibres, donc il suffit de montrer que pour tout k-schéma lisse X et tout point géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(()K) \to X$ (K corps séparablement clos), le morphisme canonique :

$$F(k) \xrightarrow{\pi^*} F\big(X^h_{(\bar{x})}\big)$$

où le but désigne la fibre du faisceau F au point $\bar{x}$ de $X_{\text{ét}}$ — que l'on calcule avec la formule habituelle :

$$F\big(X^h_{(\bar{x})}\big) = \varinjlim_V F(V)$$

où V parcourt les voisinages étales de $\bar{x}$ dans X.

Comme X est définit sur un corps, l'hensélisé strict $\mathcal{O}^h_{X,\bar{x}}$ est isomorphe à l'hensélisé strict de $\mathbb{A}^d_K$ en 0 où d est la codimension de x dans X. Par changement de base, on peut supposer $K = k$ pour simplifier les notations.

Notons S_d l'hensélisé strict de $\mathbb{A}^d_K$ au point 0. La projection $\pi : S_d \to \mathrm{Spec}(k)$ admet une section i et il s'agit de montrer que

$$i^* : F(S_d) \to F(k)$$

est injectif. La section i se factorise comme une suite d'immersions

$$\mathrm{Spec}(k) \to \ldots S_{d-1} \xrightarrow{i_d} S_d$$

et une récurrence évidente nous ramène à montre que i_d^* est injectif.

Considérons donc une section $\rho \in F(S_d)$ telle que $i_d^*(\rho) = 0$. Il existe un voisinage affine étale $X \to \mathbb{A}^d_k$ de 0 telle que ρ provienne d'une section $\rho_X \in F(X)$. Appliquons le Lemme 1.7 à p pour trouver une projection linéaire $\phi : \mathbb{A}^d_k \to \mathbb{A}^{d-1}_k = S$ et une bonne compactification de $f = \phi \circ p : X \to S$.

Notons ϕ' la composée du morphisme canonique $S_d \to \mathbb{A}^d_k$ avec ϕ. On peut alors considérer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S_d \arrow[r, shift left, "s_1"] \arrow[r, shift right, "s_2"'] \arrow[dr, equal, bend right] & X' \arrow[r, "a"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ & S_d \arrow[r, "\phi'"] & S \end{tikzcd}$$

dans lequel le carré est cartésien, s_1 est la section induite par la flèche canonique $S_d \to X$ et s_2 la section induite par $S_d \to S_{d-1} \xrightarrow{i_d} S_d \to X$. L'image inverse de la bonne compactification de X/S induit une bonne compactification de X'/S_d.

Il est clair que $s_1(0) = s_2(0)$. Donc d'après le Lemme 1.6, les flèches $s_1^*, s_2^* : F(X') \to F(S_d)$ coincident. Dès lors,

$$\rho = s_1^* a^*(\rho_X) = s_2^* a^*(\rho_X) = 0.$$

□

2. La conjecture de Quillen-Lichtenbaum

2.1. Les applications et développements du théorème de rigidité ont été nombreux. Commençons par l'application historique, à la démonstration du théorème suivant due à Suslin et qui avait été conjecturé par Lichtenbaum.

Théorème 2.2 (Suslin, 1983). *Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique p.*

Alors, pour tout entier $i > 0$, le groupe de K-théorie supérieure $K_i(F)$ est divisible et de plus :

$$K_i(F)_{tor} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \textit{ est pair,} \\ \varinjlim_{m \wedge p = 1} \mu_m(F)^{\otimes, j} & \textit{si } i = 2j-1, \end{cases}$$

où $\mu_m(F)$ est le groupe des racines m-èmes de l'unité F.

La preuve fonctionne comme suit. Avant que Gersten ne formule la conjecture de Lichtenbaum (1973), Quillen avait démontré ce résultat pour la cloture algébrique d'un corps fini. Suslin par ailleurs démontre le résultat à la main pour la K-théorie du corps des nombres complexes.

On peut alors évoquer la propriété de rigidité suivante :

(Rig1) *Suslin, 1983.–* Soit F/F_0 une extension de corps algébriquement clos et n un entier inversible dans F_0. Alors :

$$K_*(F_0; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} K_*(F; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Ce théorème est en effet un corollaire du théorème de rigidité précédent : on démontre ainsi que le faisceau étale associé à K_i sur le site des F_0-schémas lisses satisfait les hypothèses du théorème 1.5, ce qui démontre le résultat. [5]

3. Interprétation motivique

3.1. Commençons tout d'abord par donner la généralisation du théorème 1.5 au cas d'un corps algébriquement clos k. Soit $R = \mathbb{Z}/n$, n inversible dans k.

Pour le formuler, on a besoin des considérations *topos*iques suivantes : on note $\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathscr{L}_k, R)$ (resp. $\mathrm{Sh}(k_{\text{ét}}, R)$) la catégorie des faisceaux de R-modules sur le site lisse-étale $\mathscr{L}_k$ (resp. petit site étale de k).

On dispose alors d'une adjonction de catégorie :

$$\rho_\sharp : \mathrm{Sh}(k_{\text{ét}}, R) \to \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathscr{L}_k, R) : \rho^*$$

où $\rho : k_{\text{ét}} \to \mathscr{L}_k$ désigne l'inclusion évidente. Ainsi, ρ^* n'est rien d'autre que le foncteur de restriction :

$$\rho^*(F) = F|_{k_{\text{ét}}}.$$

Par ailleurs que le foncteur $\rho_\sharp$ est pleinement fidèle.

5. On se ramène au cas où F est la cloture algébrique d'une extension essentiellement de type fini du corps F_0, qui est alors un corps de fonction d'un F_0-schéma lisse.

Nous dirons qu'un faisceau $F \in \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathscr{L}_k, R)$, sur le site lisse-étale, est *rigide* si le morphisme d'adjonction canonique :

$$F \to \rho_\sharp \rho^*(F)$$

est un isomorphisme — concrètement, pour tout morphisme $f : Y \to X$ de morphismes lisses, le morphisme canonique $f^*\big(F|_{X_{\text{ét}}}\big) \to F|_{Y_{\text{ét}}}$ est un isomorphisme.

Avec ces notations, voici une généralisation immédiate du théorème de rigidité.

Théorème 3.2. *Considérons les hypothèses ci-dessus et un faisceau F de R-modules sur lisse-étale de k qui est invariant par homotopie et admet des transferts.*

Alors, F est rigide.

Le point essentiel pour déduire ce théorème du théorème 1.5 est le fait que l'extension du corps de base de k à une cloture algébrique $\bar{k}$ induit un foncteur conservatif sur la catégorie des faisceaux sur le site lisse-étale.

3.3. À mon avis, l'interprétation la plus percutante du théorème de rigidité se formule à l'aide de la théorie des complexes motiviques.

Rappelons quelques définitions classiques de la théorie de Voevodsky. Fixons un corps de base k et un anneau de coefficients R. Notons $\mathrm{Sh}^{tr}(k, R)$ la catégorie des faisceaux Nisnevich de R-modules sur le site $\mathscr{L}_k$ qui sont munis de transfers, dans le sens rappelé au Paragraphe 1.1. On peut vérifier que c'est une catégorie abélienne avec assez d'injectif — et telle que le foncteur d'oubli des transferts est exact et conservatif.

Un complexe motivique K est un complexe de Sh^{tr} dont les faisceaux de cohomologie sont invariants par homotopie (comme dans le Théorème 1.5). L'exemple type de complexe motivique est donnée par le complexe de Suslin

$$M(X) := C_*^S(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

associé à un k-schéma lisse — mais la définition a un sens même si X n'est pas lisse.

Les complexes motiviques forment une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(\mathrm{Sh}^{tr})$ que l'on note $\mathrm{DM}^{eff}(k, R)$, la catégorie des *complexes motiviques (effectifs).* C'est une catégorie triangulée stable par sommes (éventuellement infinies) et engendrée par les motifs de la forme $M(X)$ pour X lisse.[6] Cela permet essentiellement de définir un produit tensoriel sur $\mathrm{DM}^{eff}(k, R)$ tel que

$$M(X) \otimes M(Y) = M(X \times_k Y).$$

La catégorie des *spectres motiviques* (encore appelés complexes motiviques non effectifs ou stables) est obtenue en inversant formellement *dans le sens de la topologie algébrique ;* i.e. *grâce à la méthoide des spectres.* le motif de Tate pour le produit tensoriel :

$$\mathbb{Z}(1) = M(\mathbb{P}^1)/M(\{\infty\})[-2].$$

La catégorie obtenue, notée $\mathrm{DM}(k, R)$, est une catégorie triangulée monoïdale avec sommes quelconques munie d'un foncteur monoïdal

$$\mathrm{DM}^{eff}(k, R) \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{DM}(k, R)$$

tel que $\Sigma^\infty \mathbb{Z}(1)$ admet un $\otimes$-inverse, noté évidemment $\mathbb{Z}(-1)$.[7]

3.4. On obtient une variante intéressante de cette théorie en remplaçant la topologie de Nisnevich par la topologie étale. On obtient ainsi :

– la catégorie des complexes motiviques étales $\mathrm{DM}_{\text{ét}}^{eff}(k, R)$;

---

6. *i.e.* tout complexe motivique est une colimite homotopiquie de suspensions de complexes de la forme $M(X)$, X lisse.

7. C'est essentiellement la propriété universelle de $\mathrm{DM}(k, R)$.

– la catégorie des complexes motiviques étales stables $\mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,R)$.
Comme noté par Voevodsky, le théorème suivant est essentiellement une reformulation du théorème de rigidité 1.5.

Théorème 3.5. *Soit $R = \mathbb{Z}/n$ où n est un entier premier à la caractéristique de k. Alors, le foncteur de restriction :*

$$\mathrm{Sh}^{tr}(k,R) \to \mathrm{Sh}(k_{\acute{e}t},R), F \mapsto F|_{k_{\acute{e}t}}$$

où la catégorie but est la catégorie des faisceaux étales de R-modules sur le petit site étale de $\mathrm{Spec}(k)$ *induit une équivalence de catégories triangulées monoïdales :*

$$\mathrm{DM}^{eff}_{\acute{e}t}(k,R) \to \mathrm{D}(\mathrm{Sh}(k_{\acute{e}t},R)) = \mathrm{D}(k_{\acute{e}t},R).$$

En conséquence, le foncteur canonique :

$$\mathrm{DM}^{eff}_{\acute{e}t}(k,R) \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{DM}_{\acute{e}t}(k,R)$$

est aussi une équivalence de catégories.

Il s'agit d'une application du théorème 3.2 — et du fait qu'un faisceau F sur $k_{\text{ét}}$ induit un faisceau $\rho_\sharp(F)$ sur le site lisse-étale qui est invariant par homotopie et admet des transferts canoniques.

3.6. *Réalisation.*– Par définition dfu petit site étale de k, la catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(k_{\text{ét}},R)$ coïncide avec la catégorie $R[G_k]-\mathrm{mod}$ des R-modules galoisiens sur k — *i.e.* les R-modules discrets (non nécessairement de type fini) avec une action continue du groupe de Galois absolu G_k de k.

Le foncteur faisceau étale associé permet donc de définir, compte tenu du théorème précédent un foncteur triangulé monoïdal canonique :

$$\rho_{/n} : \mathrm{DM}(k,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{mod}\ n} \mathrm{DM}(k,\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{a_{\text{ét}}} \mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}/n) \simeq \mathrm{D}\left(\mathbb{Z}/n[G_k]-\mathrm{mod}\right).$$

Si ℓ est un nombre premier inversible dans k, on peut par ailleurs définir la catégorie dérivée ℓ-adique de $k_{\text{ét}}$ comme la complétion homotopique ℓ-adique [8] de $\mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z})$ — celle-ci s'identifie à la catégorie définie par Ekedhal.

On en déduit ainsi un foncteur :

$$\rho_\ell : \mathrm{DM}(k,\mathbb{Z}) \to \mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\hat{\ }_\ell} \mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}_\ell)$$

qui est à nouveau triangulé monoïdal. C'est le foncteur de réalisation ℓ-adiques. On considère aussi sa variante rationnelle :

$$\rho_\ell^{\mathbb{Q}} : \mathrm{DM}(k,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\rho_\ell \otimes \mathbb{Q}} \mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Q}_\ell)$$

obtenue en considérant les catégories rationnelles associées.

Remark 3.7. La notation $\mathrm{DM}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}_\ell)$ est trompeuse car la catégorie ne correspond pas à une catégorie de faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-module. Il s'agit plutôt de systèmes de faisceaux à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell^n$ pour n variant, comme dans la théorie d'Ekedhal.

Comme on l'a déjà vu, la catégorie $\mathrm{DM}(k,R)$ est grosse. Ces objets ne sont pas de type fini en général. On utilise dans le contexte motivique la notion suivante de finitude :

Définition 3.8. On définit la catégorie $\mathrm{DM}_{gm}(k,R)$ des *motifs géométriques* sur k à coefficients dans R comme la plus petite sous-catégorie triangulée contenant les objets de la forme $M(X)$, pour X un k-schéma lisse.

Rappelons que cette catégorie admet une description très concrète en termes de complexes à homotopie près (cf. [VSF00, chap. 5]). Elle n'est pas stable par somme infinie ; c'est une sous-catégorie stricte de $\mathrm{DM}(k,R)$.

8. cf. [CD16, 7.2] pour donner un sens à cette notion ;

3.9. L'image des motifs géométriques par le foncteur de réalisation $\rho_\ell^{\mathbb{Q}}$ tombe naturellement dans la sous-catégorie de $\mathrm{D}(k_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)$ formée des complexes parfaits. Autrement dit, la catégorie dérivée des représentations galoisienns ℓ-adique dans le sens classique (en particulier de dimension finie).

Ainsi, le foncteur de réalisation construit avant la définition précédente prend la forme finale suivante :

$$\rho_\ell^{\mathbb{Q}} : \mathrm{DM}_{gm}(k, R) \to \mathrm{D}\left(\mathrm{Rep}(G_k, \mathbb{Q}_\ell)\right).$$

Une des conjectures les plus importantes du domaine est que ce foncteur est *conservatif.*

Remark 3.10.
(1) si k est de type fini sur son sous-corps premier, la conjecture de Tate affirme que ce foncteur est même pleinement fidèle.
(2) Caractériser l'image essentielle de ce foncteur est aussi un problème ouvert très intriguant. Il semble plausible que cette image essentielle admette une t-structure dont le coeur est formé par les représentations galoisiennes ℓ-adiques dites "d'origine géométrique". Caractériser ces représentations purement en termes galoisien semble un problème totalement inaccessible en général — seuls les cas des corps de nombres et des corps de fonctions (de courbes) sur un corps fini semblent compris.
(3) Les considérations précédentes ont été étendues par Ayoub d'un côté et Cisinski-Déglise indépendamment dans le cas où l'on remplace le corps de base k par un schéma noethérien de dimension fini arbitraire S. cf. [Ayo14, CD16].

Références

[Ayo14] J. Ayoub. La réalisation étale et les opérations de Grothendieck. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 47(1) :1–145, 2014.

[CD16] Denis-Charles Cisinski and Frédéric Déglise. Étale motives. *Compos. Math.*, 152(3) :556–666, 2016.

[SV96] A. Suslin and V. Voevodsky. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Invent. Math.*, 123(1) :61–94, 1996.

[VSF00] V. Voevodsky, A. Suslin, and E. M. Friedlander. *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*, volume 143 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton Univ. Press, 2000.